

Le maree

a cura di Giancarlo Buccella

Premessa

Le maree sono uno dei fenomeni più affascinanti del nostro pianeta e rappresentano un perfetto esempio di come forze gravitazionali distanti possano influenzare direttamente la nostra vita quotidiana. L'effetto mareale è quel fenomeno per cui un corpo celeste, come la Terra, viene "deformato" dall'attrazione gravitazionale di un altro corpo, come la Luna o il Sole. Questo non significa che il pianeta si pieghi visibilmente, ma che la sua massa, in particolare quella fluida come gli oceani, tende a "stirarsi" lungo la direzione del corpo che la attrae ed in versi opposti. Mentre la Terra ruota sul proprio asse, ogni punto della sua superficie passa attraverso questi due rigonfiamenti ogni 24 ore circa, spiegando perché si verificano due alte e due basse maree al giorno.

La causa principale: l'attrazione gravitazionale

Il fenomeno delle maree è causato principalmente dall'attrazione gravitazionale che la Luna esercita sulla Terra. Secondo la legge di gravitazione universale di Newton, ogni corpo celeste attrae ogni altro corpo con una forza direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza che li separa.

La Terra non è un corpo rigido: gli oceani, essendo fluidi, possono deformarsi sotto l'azione di forze esterne. Quando la Luna si trova sopra un oceano, l'acqua viene letteralmente "tirata" verso l'alto, creando un rigonfiamento. Questo genera l'alta marea.

Il meccanismo delle due maree giornaliere

Potreste chiedervi perché abbiamo due alte maree al giorno invece di una sola. La spiegazione è più sottile di quanto sembri. Mentre il lato della Terra rivolto verso la Luna subisce un'attrazione gravitazionale più forte (essendo più vicino), il lato opposto ne subisce una più debole. Questo crea una differenza di forze che causa un secondo rigonfiamento sul lato opposto della Terra.

Inoltre, dobbiamo considerare che il sistema Terra-Luna ruota attorno al loro centro di massa comune (baricentro), che si trova all'interno della Terra ma non al suo centro. Questo movimento rotazionale genera una forza centrifuga che contribuisce al rigonfiamento oceanico sul lato opposto alla Luna.

Il contributo del Sole

Anche il Sole influenza le maree, nonostante sia molto più lontano della Luna. Quando Sole e Luna sono allineati (durante la luna nuova o piena), i loro effetti si sommano creando le "maree sigiziali" - particolarmente intense. Quando invece formano un angolo retto rispetto alla Terra (durante i quarti di luna), i loro effetti si sottraggono parzialmente, generando le "maree di quadratura" - meno pronunciate.

La forza di marea generata dal Sole è pari a circa il 46% della forza di marea generata dalla Luna. In altre parole, l'influenza della Luna è circa 2,2 volte maggiore di quella del Sole

Variazioni locali

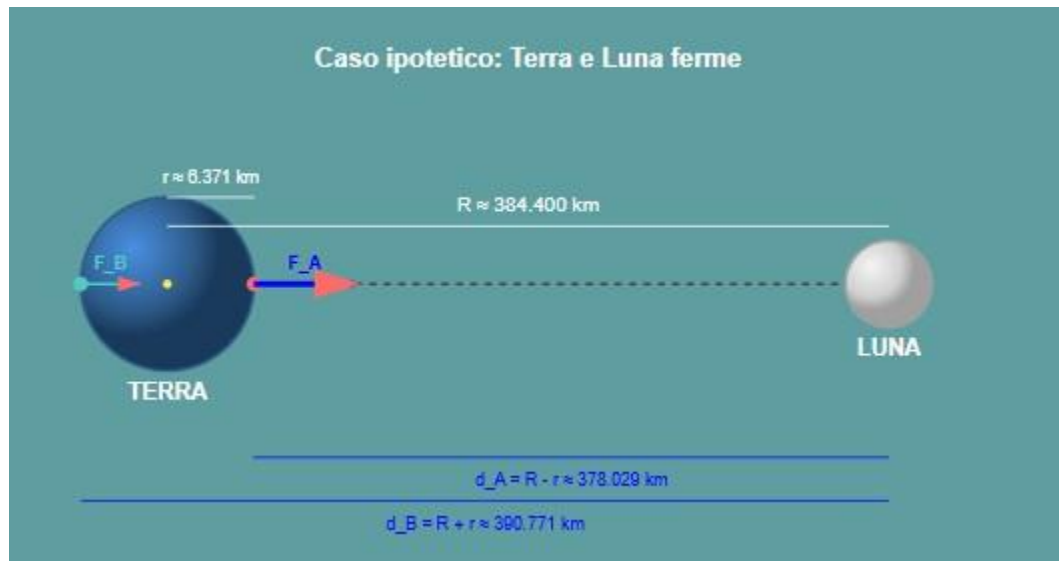
L'intensità delle maree varia enormemente da luogo a luogo. In mari chiusi come il Mediterraneo, le maree sono appena percettibili (pochi centimetri), mentre in alcune baie come quella di Fundy in Canada possono superare i 15 metri di escursione. Questo dipende dalla forma delle coste, dalla profondità dei fondali e dalla risonanza dei bacini oceanici.

Conseguenze ed applicazioni

Le maree hanno profonde implicazioni biologiche ed economiche. Molti ecosistemi costieri si sono evoluti in sincronia con i cicli mareali, e oggi sfruttiamo questo fenomeno per produrre energia pulita attraverso le centrali mareomotrici.

Il fenomeno delle maree rappresenta quindi un esempio straordinario di come la meccanica celeste si manifesti concretamente sulla Terra, dimostrando l'interconnessione tra i diversi corpi del sistema solare e la capacità della fisica di spiegare fenomeni apparentemente complessi attraverso principi fondamentali eleganti.

Partiamo con illustrare il caso ipotetico in cui Terra e Luna siano fermi nelle loro posizioni, in un SR inerziale. Nel seguente disegno viene schematizzata la situazione, non è stata disegnata la forza di gravità dovuta alla Terra per maggiore chiarezza.



$$G = 6.67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$M_L = 7.35 \times 10^{22} \text{ kg}$$

$$M_T = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

$$r = 384,000 \text{ km} = 3.84 \times 10^8 \text{ m}$$

$$R = 6,378 \text{ km} = 6.378 \times 10^6 \text{ m}$$

$$a_{A-Luna} = G \frac{M_L}{(r-R)^2} = 3.43 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$$

$$a_{B-Luna} = G \frac{M_L}{(r+R)^2} = 3.21 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$$

$$a_{Terra} = G \frac{M_T}{R^2} = 9.82026 \text{ m/s}^2$$

$$a_{A,tot} = a_{A-Luna} - a_{Terra} = -9.82023 \text{ m/s}^2$$

$$a_{B,tot} = a_{B-Luna} + a_{Terra} = 9.82029 \text{ m/s}^2$$

$$\Delta a = 6.0 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$$

Punto A (lato più vicino alla Luna):

- La gravità terrestre “tira” la superficie verso il centro della Terra.
- La gravità lunare “tira” la superficie in direzione opposta.
- La forza netta ha un valore leggermente inferiore al valore dato dalla presenza sola Terra, la superficie (se deformabile, come l'acqua) può "dilatarsi" formando l'alta marea. Si ha quindi un lieve rigonfiamento della superficie.

Punto B (lato più lontano dalla Luna):

- La gravità terrestre “tira” la superficie verso il centro della Terra.
- Anche la gravità lunare, in questa posizione, agisce nella stessa direzione, sebbene con una intensità minore rispetto al caso precedente poiché il punto B è più lontano dalla Luna rispetto al punto A.
- La forza netta ha ora un valore leggermente superiore al valore dato dalla presenza della sola Terra, il risultato è che la superficie liquida della terra essendo deformabile subirebbe un abbassamento formando la bassa marea. Si ha quindi un lieve abbassamento della superficie.

La seguente figura mostra in modo esagerato il rigonfiamento a destra e l'infossamento a sinistra: alta marea a destra e bassa marea a sinistra.



Abbiamo quindi appurato che se la Terra e Luna li considerassimo immobili nello spazio (fissi e non in orbita):

non esisterebbe un'accelerazione comune del sistema verso la Luna (non c'è caduta libera).

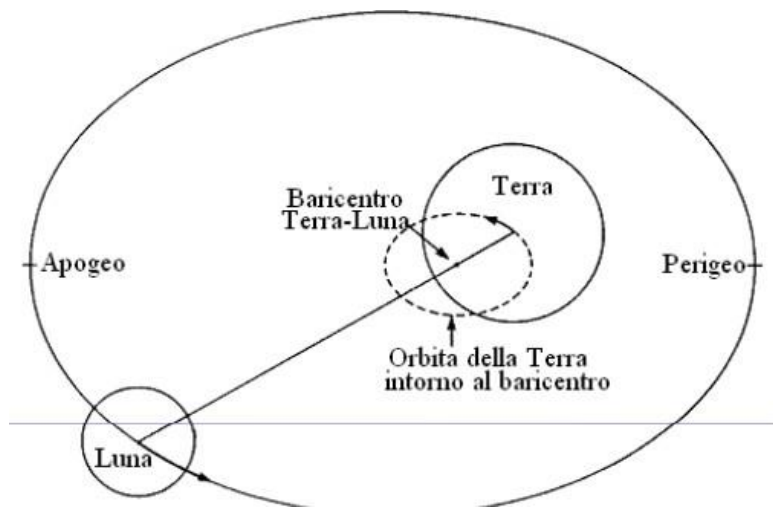
la deformazione sarebbe data solo data dalla somma statica delle forze gravitazionali.

Non si creerebbe il rigonfiamento nel lato della Terra opposto alla Luna, cioè la doppia gobba tipica delle maree, in quanto mancherebbe l'effetto dinamico dovuto alla rotazione del sistema.

Effetto mareale

L'effetto mareale vero e proprio è legato a come la Terra e la Luna si muovono insieme attorno al loro baricentro comune. In pratica:

- Il sistema Terra-Luna è in caduta libera attorno al baricentro.
- Tutto il pianeta subisce un'accelerazione comune verso la Luna.
- Quello che conta per le maree è la differenza fra l'accelerazione locale della Luna su un punto e l'accelerazione del centro della Terra, cioè l'accelerazione relativa.



Contrariamente all'intuizione comune, la Luna non orbita semplicemente attorno al centro della Terra. In realtà, entrambi i corpi celesti orbitano attorno a un punto comune chiamato baricentro, che è il centro di massa del sistema Terra-Luna. Poiché la Terra è molto più massiccia della Luna, questo baricentro si trova all'interno della Terra stessa. Il periodo di questo moto orbitale è ovviamente il mese siderale.

Di conseguenza, anche la Terra compie una piccola orbita mensile attorno a questo punto. Il moto che ne risulta genera un'accelerazione centripeta, che andiamo ora ad analizzare e calcolare.

Descrizione Analitica

L'accelerazione centripeta, a_c , è l'accelerazione che un corpo subisce quando si muove lungo una traiettoria curva, ed è sempre diretta verso il centro di curvatura dell'orbita. La sua formula è:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

Dove:

- v è la velocità orbitale del corpo (in questo caso, della Terra attorno al baricentro).
- r è il raggio dell'orbita (la distanza del centro della Terra dal baricentro).
- ω è la velocità angolare, data da $\omega = \frac{2\pi}{T}$, dove T è il periodo orbitale.

Per calcolare l'accelerazione centripeta della Terra, dobbiamo prima determinare la posizione del baricentro e, di conseguenza, il raggio della piccola orbita terrestre.

Calcolo della posizione del baricentro (r_{Terra})

La posizione del baricentro si calcola con la formula del centro di massa per un sistema a due corpi:

$$M_{\text{Terra}} \cdot r_{\text{Terra}} = M_{\text{Luna}} \cdot r_{\text{Luna}}$$

Dove r_{Terra} e r_{Luna} sono le distanze dei centri di Terra e Luna dal baricentro, e M sono le rispettive masse.

Sapendo che la distanza totale tra i centri dei due corpi, d , è $d = r_{\text{Terra}} + r_{\text{Luna}}$, possiamo esprimere r_{Luna} come $d - r_{\text{Terra}}$ e risolvere per r_{Terra} :

$$M_{\text{Terra}} \cdot r_{\text{Terra}} = M_{\text{Luna}} \cdot (d - r_{\text{Terra}}) \quad r_{\text{Terra}} \cdot (M_{\text{Terra}} + M_{\text{Luna}}) = M_{\text{Luna}} \cdot d$$
$$r_{\text{Terra}} = \frac{M_{\text{Luna}} \cdot d}{M_{\text{Terra}} + M_{\text{Luna}}}$$

Questa formula ci fornisce il raggio dell'orbita della Terra attorno al baricentro.

La velocità angolare è determinata dal periodo di rivoluzione del sistema, che è il mese siderale, T .

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Sostituendo le espressioni di r_{Terra} e ω nella formula dell'accelerazione centripeta, otteniamo l'espressione analitica completa:

$$a_{c,\text{Terra}} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \left(\frac{M_{\text{Luna}} \cdot d}{M_{\text{Terra}} + M_{\text{Luna}}}\right)$$

Utilizziamo ora i valori standard per le costanti fisiche:

Massa della Terra (M_{Terra}): 5.9722×10^{24} kg

Massa della Luna (M_{Luna}): 7.342×10^{22} kg

Distanza media Terra-Luna (d): 384,400 km = 3.844×10^8 m

Periodo orbitale (mese siderale, T): 27.32 giorni $\approx 2.36 \times 10^6$ s

$$r_{\text{Terra}} = \frac{(7.342 \times 10^{22} \text{ kg}) \cdot (3.844 \times 10^8 \text{ m})}{(5.9722 \times 10^{24} \text{ kg}) + (7.342 \times 10^{22} \text{ kg})} \approx 4.67 \times 10^6 \text{ m}$$

Questo risultato, 4670 km, conferma che il baricentro si trova ben all'interno del raggio terrestre (che è di circa 6371 km).

$$\omega = \frac{2\pi}{2.36 \times 10^6 \text{ s}} \approx 2.662 \times 10^{-6} \text{ rad/s}$$

$$a_{c,\text{Terra}} = \omega^2 \cdot r_{\text{Terra}} \quad a_{c,\text{Terra}} = (2.662 \times 10^{-6} \text{ rad/s})^2 \cdot (4.67 \times 10^6 \text{ m})$$

$$a_{c,\text{Terra}} \approx 3.31 \times 10^{-5} \text{ m/s}^2$$

In senso generale questo valore, sebbene piccolo, è fondamentale. È questa accelerazione che, insieme all'attrazione gravitazionale del Sole, determina la complessa traiettoria della Terra nello spazio, che non è una semplice ellisse ma un'ellisse con una piccola "oscillazione" mensile.

Tornando al nostro caso, l'aspetto fondamentale da comprendere è che noi, trovandoci sulla Terra, sperimentiamo accelerazioni *relative* al centro della Terra, che è a sua volta un sistema di riferimento non inerziale (perché accelera). La "marea" non è data dalla gravità lunare in sé, ma dalla *differenza* tra l'attrazione lunare su di noi e l'attrazione lunare sul centro della Terra.

Analisi delle accelerazioni

Consideriamo una massa di prova m sulla superficie terrestre. In un sistema di riferimento inerziale (ad esempio, fisso rispetto al Sole), le accelerazioni agenti sulla massa m sono:

1. Accelerazione gravitazionale terrestre ($a_{g,T}$): L'attrazione esercitata dalla massa della Terra.
2. Accelerazione gravitazionale lunare ($a_{g,L}$): L'attrazione esercitata dalla massa della Luna.

Tuttavia, il centro della Terra stesso è accelerato dalla gravità lunare. Questa è esattamente l'accelerazione centripeta a_c che abbiamo calcolato prima, la quale mantiene la Terra nella sua orbita attorno al baricentro.

$$a_c = \frac{GM_{\text{Luna}}}{d^2}$$

L'accelerazione netta che una massa m sperimenta *rispetto al centro della Terra* (e che quindi causa la deformazione del pianeta) è la somma vettoriale di tutte le accelerazioni agenti su m meno l'accelerazione del sistema di riferimento stesso (il centro della Terra).

$$a_{\text{netta},m} = (a_{g,T} + a_{g,L}) - a_c \quad (*)$$

Raggruppando i termini, otteniamo:

$$a_{\text{netta},m} = a_{g,T} + (a_{g,L} - a_c)$$

Il termine $a_{g,T}$ è semplicemente l'accelerazione di gravità standard che ci tiene ancorati al suolo. Il termine interessante è $(a_{g,L} - a_c)$, che rappresenta l'accelerazione di marea (a_{marea}). È la differenza tra l'attrazione lunare nel punto in cui si trova la massa m e l'attrazione lunare sul centro della Terra.

Analizziamo ora i due casi specifici lungo la congiungente Terra-Luna.

Caso 1: Punto Sublunare (P_{sub})

La massa m si trova nel punto della superficie terrestre più vicino alla Luna.

Distanza di m dalla Luna: $d - R_{\text{Terra}}$

Direzione: Assumiamo un asse che va dalla Terra alla Luna come positivo.

– Accelerazione gravitazionale Terrestre ($a_{g,T}$):

$$a_{g,T} = -\frac{GM_{\text{Terra}}}{R_{\text{Terra}}^2} \quad \text{diretta verso il centro della Terra (direzione negativa).}$$

– Accelerazione gravitazionale Lunare su m ($a_{g,L}$):

$$a_{g,L}(P_{\text{sub}}) = +\frac{GM_{\text{Luna}}}{(d - R_{\text{Terra}})^2} \quad \text{diretta verso la Luna (direzione positiva).}$$

– Accelerazione del centro della Terra (a_c):

$$a_c = +\frac{GM_{\text{Luna}}}{d^2} \quad \text{anch'essa è diretta verso la Luna (direzione positiva).}$$

Calcolo dell'accelerazione di marea a P_{sub} : l'accelerazione di marea è la differenza tra l'attrazione lunare su m e quella sul centro della Terra.

$$a_{\text{marea}}(P_{\text{sub}}) = a_{g,L}(P_{\text{sub}}) - a_c = \frac{GM_{\text{Luna}}}{(d - R_{\text{Terra}})^2} - \frac{GM_{\text{Luna}}}{d^2}$$

Poiché $(d - R_{\text{Terra}}) < d$, il primo termine è più grande del secondo. Il risultato è positivo. Questo significa che nel punto sublunare, la massa m (e l'acqua dell'oceano) è tirata verso la Luna *più fortemente* del centro della Terra. Relativamente alla Terra, questo si manifesta come un'accelerazione verso l'esterno, che solleva l'acqua e crea l'alta marea.

Il valore numerico di tale accelerazione è $a_{\text{marea}}(P_{\text{sub}}) = 1.1 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^2$

Caso 2: Punto Antipodale (P_{ant})

La massa m si trova nel punto della superficie terrestre più lontano dalla Luna.

Distanza di m dalla Luna: $d + R_{Terra}$

Direzione: Usiamo lo stesso asse di prima.

– Accelerazione Gravitazionale Terrestre ($a_{g,T}$):

$a_{g,T} = + \frac{GM_{Terra}}{R_{Terra}^2}$ diretta verso il centro della Terra (in questo caso, lungo la direzione positiva dell'asse se l'origine è in P_{ant}). Per coerenza, diciamo che è sempre $-g$ se misurata radialmente verso l'esterno.

– Accelerazione Gravitazionale Lunare su m ($a_{g,L}$):

$a_{g,L}(P_{ant}) = + \frac{GM_{Luna}}{(d+R_{Terra})^2}$ diretta verso la Luna (direzione positiva).

– Accelerazione del Centro della Terra (a_c):

$a_c = + \frac{GM_{Luna}}{d^2}$ sempre diretta verso la Luna (direzione positiva).

Calcolo dell'Accelerazione di Marea a P_{ant} :

$$a_{marea}(P_{ant}) = a_{g,L}(P_{ant}) - a_c = \frac{GM_{Luna}}{(d + R_{Terra})^2} - \frac{GM_{Luna}}{d^2}$$

Ora, poiché $(d + R_{Terra}) > d$, il primo termine è più piccolo del secondo. Il risultato è negativo. Questo significa che l'accelerazione di marea è diretta in verso opposto alla Luna.

Il valore numerico di tale accelerazioni è

$$a_{marea}(P_{sub}) = a_{marea}(P_{ant}) = 1.1 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^2$$

Essendo g circa 10 m/s^2 tali accelerazioni sono circa un decimilionesimo di g .

L'interpretazione fisica è che il centro della Terra è attratto verso la Luna *più fortemente* della massa m al punto antipodale. È come se la Terra venisse "tirata via da sotto" la massa m , lasciandola indietro. Relativamente alla Terra, questo si manifesta di nuovo come un'accelerazione verso l'esterno, creando la seconda alta marea.

Conclusione

L'accelerazione totale a cui è soggetta la massa m sulla superficie terrestre, e che ne determina il "peso" effettivo, è la somma della gravità terrestre e dell'accelerazione di marea:

$$a_{\text{totale},m} = a_{g,T} + a_{\text{marea}}$$

Al punto sublunare, l'accelerazione di marea è diretta verso l'esterno, opponendosi leggermente alla gravità terrestre e causando un rigonfiamento.

Al punto antipodale, l'accelerazione di marea è anch'essa diretta verso l'esterno, opponendosi ugualmente alla gravità e causando il secondo rigonfiamento.

(*) Questa espressione viene dal considerare che in un SR non inerziale vale la seguente relazione

$$\mathbf{a}_{\text{ass}} = \mathbf{a}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{tr}} + \mathbf{a}_{\text{cor}}$$

Accelerazione assoluta ($\mathbf{a}_{\text{assoluta}}$): È l'accelerazione di un punto (la nostra massa m) misurata in un sistema di riferimento fisso o inerziale (S). Nel nostro caso, è la somma di tutte le forze gravitazionali "vere" che agiscono su m , divisa per m . $\mathbf{a}_{\text{assoluta}} = \mathbf{a}_{g,T} + \mathbf{a}_{g,L}$

Accelerazione relativa ($\mathbf{a}_{\text{relativa}}$): è l'accelerazione dello stesso punto misurata in un sistema di riferimento mobile o non inerziale (S'). Nel nostro caso, il sistema di riferimento è solidale con il centro della Terra. Questa è l'accelerazione che un osservatore sulla Terra "vede" o "sente". È esattamente l'accelerazione netta che stavamo cercando, quella che causa la deformazione mareale.

Accelerazione di trascinamento ($\mathbf{a}_{\text{trascinamento}}$): È l'accelerazione che avrebbe un punto fisso nel sistema mobile S' , vista dal sistema fisso S . In parole povere, è l'accelerazione del sistema di riferimento mobile stesso. Nel nostro caso, è l'accelerazione del centro della Terra (a_c) dovuta alla sua orbita attorno al baricentro Terra-Luna. $\mathbf{a}_{\text{trascinamento}} = \mathbf{a}_c$

Accelerazione di Coriolis ($\mathbf{a}_{\text{Coriolis}}$): Questo è un termine aggiuntivo che compare solo se il sistema di riferimento mobile sta ruotando. Poiché la Terra ruota sul proprio asse, questo termine esiste ed è fondamentale per spiegare la rotazione dei cicloni e le correnti oceaniche. La sua formula è $\mathbf{a}_c = 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{relativa}})$, dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del sistema mobile (la rotazione terrestre) e $\vec{v}_{\text{relativa}}$ è la velocità della massa m rispetto alla Terra. Per l'analisi statica dei rigonfiamenti mareali, questo termine può essere inizialmente trascurato per semplicità, come qui è stato fatto, ma è essenziale in una trattazione dinamica completa delle maree.

Collegamento con la spiegazione precedente.

Ora riorganizziamo la formula per trovare ciò che ci interessa, ovvero l'accelerazione relativa (l'effetto che sentiamo sulla Terra):

$$\vec{a}_{\text{relativa}} = \vec{a}_{\text{assoluta}} - \vec{a}_{\text{trascinamento}} - \vec{a}_{\text{Coriolis}}$$

Sostituendo i termini che abbiamo identificato per il problema delle maree si ha

$$\vec{a}_{\text{relativa}} = (\vec{a}_{g,T} + \vec{a}_{g,L}) - \vec{a}_c - \vec{a}_{\text{Coriolis}}$$

Se trascuriamo l'effetto di Coriolis, come è lecito fare in una trattazione non avanzata, otteniamo:

$$\vec{a}_{\text{relativa}} = (\vec{a}_{g,T} + \vec{a}_{g,L}) - \vec{a}_c$$
